AMERINDIA n°17, 1992

regards croisés sur la droite réelle
quelle concrétisation des ensembles de nombres pour l'éducation bilingue amérindienne ?

André CAUTY

Université BORDEAUX 1
URA 1026 CNRS (Paris)

1. Introduction

1.1. Une entité mathématique nouvelle reste toujours très difficile à concevoir et à communiquer[1] tant qu'aucune "concrétisation" convenable n'a été inventée ou découverte qui permette au mathématicien de se la représenter et de la ressentir comme un objet "réel".

1.2. L'histoire fournit de nombreuses illustrations de cette difficulté et de la "libération" qu'apporte la découverte d'une représentation "concrète". Ce fut notamment le cas lors de l'invention des nombres négatifs et, plus encore, des nombres "irrationnels" et "imaginaires" ou, plus récemment, "non-standards".

[1] Son enseignement, en langues améridiennes, à des Amérindiens et par des maîtres amérindiens, posera inévitablement des difficultés encore bien plus redoutables et qu'il convient d'envisager avant de lancer des campagnes d'éducation qui ne seraient pas nécessairement comprises des intéressés.

1.3. Rappelons brièvement le cas des nombres "imaginaires". Au XVIe siècle, le mathématicien italien BOMBELLI disait : «*de l'avis de beaucoup, c'était une idée insensée, et moi-même je fus longtemps de cette opinion ; toute la question semblait reposer sur un sophisme plutôt que sur la réalité ; cependant, je cherchai*[2] *jusqu'à ce que j'eusse prouvé que c'était bien la vérité*».

1.4. Au XVIIIe siècle, les "imaginaires" ont littéralement envahi la pratique mathématique ; leur statut n'en demeure pas moins "sulfureux" et "énigmatique". EULER, par exemple, écrivait encore en 1770 : «*toutes les expressions comme i-1, i-2, etc., sont* [...] *des nombres impossibles ou imaginaires ; puisqu'ils représentent les racines carrées de quantités négatives ; de ces nombres nous pouvons seulement affirmer qu'ils ne sont ni zéro, ni supérieurs à zéro, ni inférieurs à lui, ce qui nécessairement, les rend imaginaires ou impossibles*».

1.5.1. Le ton changera brusquement et radicalement quelques décennies plus tard ; et plus aucun mathématicien ne continuera à considérer ces nombres comme impossibles ou imaginaires.

1.5.2. La raison en est fort simple et elle a d'ailleurs été relevée par le mathématicien GAUSS. Mais il faut d'abord rappeler que DESCARTES avait inventé ce que nous appelons maintenant les systèmes de coordonnées qui permettent d'associer à tout point du plan un couple de nombres servant à le repérer et pouvant le représenter ou en être le représentant.

1.5.3. La géométrie de DESCARTES identifiait cependant, moins l'ensemble des couples de nombres aux points du plan que l'ensemble des points de courbes particulières aux couples de leurs coordonnées liées par une relation fonctionnelle (l'équation "cartésienne" de la courbe).

Il restait à identifier un point quelconque du plan à un couple de nombres. Ou, ce qui revient au même, à considérer tout point du plan comme

---

[2] Ce que cherchait BOMBELLI, c'était les racines de l'équation $x^3 = 15x + 4$; cette équation a trois racines réelles, à savoir : 4, (-2 + *i*3) et (-2 - *i*3) que l'on obtenait par les formules de CARDAN [de la forme x = ^{3}i(2 + i-121) + ^{3}i(2 - i-121)] lesquelles font intervenir des expressions que nous disons aujourd'hui "complexes conjuguées" mais qui, à cette époque, désignaient des expressions "impossibles", "irréelles", "imaginaires", en l'occurrence des racines carrées de quantités négatives. Le "sophisme" provient du fait qu'une écriture désignant des entités "impossibles" conduisent à des racines bien "réelles".

une entité numérique complexe, faite de deux nombres réels convenablement liés l'un à l'autre.

1.5.4. Ce pas fut réalisé indépendamment par trois chercheurs : un obscur arpenteur norvégien du nom de WESSEL (1797) dont le rapport à l'Académie des Sciences du Danemark passa inaperçu ; le jeune GAUSS, la même année, lors de la soutenance de sa thèse sur le théorème fondamental de l'algèbre ; enfin, en 1806, par un comptable parisien du nom d'ARGAND.

C'est dans sa maturité, en 1831, que le mathématicien GAUSS formula, avec la précision mathématique requise, une manière d'identifier les points du plan et les couples de réels. Cette fois, la communauté mathématique reçut le message.

1.5.5. La clef de cette identification est maintenant bien connue des bacheliers. Elle consiste à interpréter l'imaginaire *i* = *i*-1 comme un opérateur géométrique, une rotation d'angle droit. Dans cette identification, tout point M du plan représente (et est représenté par) un nombre complexe z de la forme z = x + *i*y, x et y étant le couple de réels correspondant aux coordonnées du point M dans un repère convenable.

Dès lors, les nombres "imaginaires" recevaient une interprétation concrète immédiate en termes de transformations géométriques.

1.6.1. L'effet de cette "concrétisation" fut immédiat et provoqua un changement d'attitude radical dans la communauté mathématique[3] : désormais, plus personne ne doutait de la "réalité" ou de la "possibilité" de ces entités autrefois "imaginaires" ou "impossibles".

GAUSS était parfaitement conscient du fait que cette transformation conférait une "existence objective" à ces entités mathématiques que la tradition estimait "impossibles" : «*il y a plusieurs années que l'auteur considère cette partie importante des mathématiques à un point de vue différent, grâce auquel on peut attribuer une existence objective aux quantités imaginaires*»**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**.

[3] A cette époque, tous les mathématiciens utilisaient les nombres "imaginaires" qui permettaient de résoudre effectivement un grand nombre d'équations. Mais si l'outil était accepté (comme un "sophisme"), l'entité "imaginaire", elle, ne l'était pas.

1.6.2. La concrétisation par un modèle "évident" (les points d'un plan que l'on peut voir et dessiner) avait permis d'obtenir ce que l'utilité indéniable de l'outil n'avait pas réussi : donner droit de cité à des entités "impossibles".

1.6.3. Nous retiendrons que la découverte d'une interprétation et d'une représentation convenables est toujours un moment essentiel de la vie d'un concept scientifique et une condition quasi-nécessaire de son acceptation et de sa transmission.

2) Divergences culturelles

2.0. En 1989 et 1990, j'ai eu l'occasion[4] d'animer des groupes de travail informel auxquels participaient des responsables des communautés amérindiennes (mamas[5], instituteurs indigènes, responsables politiques...) de la Sierra Nevada de Santa Marta (Colombie).

2.1. L'objectif que je m'étais fixé était de rechercher, en vue d'un futur et hypothétique enseignement des mathématiques en langues amérindiennes[6], une "concrétisation" *culturellement acceptable* de la structure mathématique dite du "corps des nombres réels"[7].

2.2. Un modèle occidental de cette structure est ce qu'on appelle la droite "réelle" ; l'interprétation est réalisée par une mise en correspondance des nombres x du corps R et des points M de la droite D au moyen d'une bijection qui associe à tout point M son abscisse x_M (définie à partir d'une origine O sur la droite et grâce au choix d'une orientation et d'une unité de mesure). C'est évidemment ce modèle qui guidait mes questions et suggestions.

---

[4] Ces groupes de réflexion s'inscrivaient dans les "ateliers" organisés régulièrement depuis 1986 par la linguiste colombienne Maria TRILLOS AMAYA du Centre Colombien d'Etudes des Langues Amérindiennes (Bogota), professeur à l'Université de l'Atlantique de Barranquilla.

[5] Chaman.

[6] On sait que le défi est bien d'enseigner les sciences, notamment les mathématiques, dans des langues amérindiennes qui ne disposent pas des vocabulaires techniques correspondants. Le premier obstacle à lever étant souvent la création d'une néonumération. Maria TRILLOS AMAYA et moi-même élaborons, avec d'autres chercheurs colombiens, le projet *Kwibi Urraga* (maison de la sagesse). Il s'agit, pour relever ce défi, d'organiser des lieux où pourraient se rencontrer et collaborer à cette tâche des chaînes de personnes allant des responsables religieux et politiques des communautés aux chercheurs colombiens et étrangers en passant par les maîtres indigènes.

[7] Le corps R des réels comprend les entiers naturels, les rationnels (de la forme p/q) et les irrationnels (comme *i*2) ; mais aussi les nombres transcendants (non-algébriques) comme Ó (rapport de la circonférence au diamètre d'un cercle).

2.3.1. Une difficulté ne tarda pas à se présenter. Un mama me dit que cette image de la droite ne pouvait pas être intéressante parce qu'elle heurtait l'image indienne du temps.

2.3.2. En effet, les cosmovisions occidentale et amérindienne diffèrent passablement sur ce point de la représentation du temps (grammatical et cosmologique). Pour un occidental, le futur se trouve devant l'observateur ; pour un indien, il se trouve derrière l'observateur.

La raison invoquée pour placer devant soi le passé étant qu'il est connu et donc visible.

Outre leurs orientations opposées, le temps indien s'oppose encore au temps occidental comme le cyclique s'oppose au linéaire.

3) Recherche d'un modèle de droite "réelle"

3.0. Il m'est impossible de rapporter les innombrables discussions[8] et digressions[9] provoquées par cette prise de conscience de la divergence radicale de nos cosmovisions respectives.

3.1. Je n'avais pas plus de raisons d'abandonner le modèle occidental de la droite réelle que mes interlocuteurs n'en avaient de renoncer à leur cosmovision. La situation aurait pu en rester là, bloquée sur ce constat d'incompatibilité.

Elle s'est débloquée, autant que je m'en souvienne, grâce à une remarque d'un mama.

3.2. «*Une droite est comme cette corde. Tendue ou détendue, déroulée ou enroulée, c'est toujours une corde*».

Pour donner plus de poids à cette remarque, le mama m'emmena au centre de la churuata et me fit regarder vers le plafond conique : «*Regarde. Tu vois cet escargot qui relie les poutres et descend du sommet. C'est aussi une corde*»**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**.

Effectivement, une sorte de corde descendait selon une trajectoire en "hélice" depuis le sommet et reliait les poutres horizontales et verticales.

[8] Coupées épisodiquement par l'arrivée d'un détachement de l'armée, d'un groupe de "muchachos" ou de quelque colon.

[9] Sur l'attitude intolérante des linguistes-missionnaires du Summer Institute ou sur mes connaissances du calendrier maya.

3.3. Les réflexions de ce mama m'inspirèrent immédiatement : plus qu'une vérité de bon sens, elles traduisaient une propriété d'invariance importante, celle de la structure topologique définissant l'ordre[10] des points de la corde.

La droite réelle peut bien être droite ou enroulée en "hélice", cela ne changerait rien à son aptitude à représenter les nombres réels, à modéliser la structure de corps.

3.4. J'en étais là de mes réflexions, quand le mama, avec le respect dû aux choses sacrées, me révèle que ce que je vois n'est que l'image visible du monde invisible des Dieux. Les poutres, le toit et le temple de la sagesse ne sont que des images terrestres «*comme dans un miroir*» des réalités d'un monde supérieur, monde invisible aux profanes et que seuls perçoivent les mamas.

3.5. Dans l'image que je me fis, le plan de symétrie n'est autre que le sol (mais je ne sais si cette représentation correspond exactement ou non à celle du mama).

Cette position du plan de symétrie laisse libre une autre interprétation (qui me paraît importante pour la future école indienne), celle qui naît lorsqu'on fait passer le plan de symétrie par le sommet du toit du temple de la sagesse.

Cette deuxième position fait, en effet, apparaître la deuxième nappe du cône que forme la toiture du temple.

3.6. Quoi qu'il en soit, l'indien qui refusait l'image de la droite réelle des Blancs me proposait celle d'une droite enroulée en forme d'hélice sur la nappe d'un cône. Le mathématicien n'y trouvait rien à redire.

3.7. Il ne restait plus qu'à exploiter cette concrétisation possible du corps des nombres sous la forme de la courbe de l'escargot qui court sous le toit de la "maison de la sagesse"[11] des indiens de la Sierra Nevada.

---

[10] Ce qui est essentiel, du point de vue mathématique et comme on le sait depuis les travaux de PEANO, FREGE, CANTOR ou encore DEDEKIND, pour définir les axiomatiques susceptibles de fonder et d'articuler la construction de l'ensemble des entiers et celle du continu géométrique.

[11] Kwibi Urraga. Cette expression remplace, depuis 1989 et dans certaines communautés de la Sierra Nevada, les pancartes "School" que des missionnaires du Summer Institute of Linguistics avaient posées dans les villages.

Ces questions n'ont pas encore été abordées dans nos ateliers informels ; par contre, j'en ai longuement discuté avec Rubiel ZALABATA TORRES, un Ika diplômé de linguistique de l'Ecole des Hautes Etudes de Paris.

3.8. Il ressort de ces discussions qu'une stratégie d'enseignement qui utiliserait cette concrétisation pourrait être particulièrement prometteuse.

Ce modèle indien de la droite réelle permet, en effet, de poser "immédiatement" et de manière "naturelle" bon nombre de questions qui paraissent "fondamentales" au mathématicien occidental. Il s'agit notamment de :

i) la possibilité d'introduire simplement le problème du concept de nombre (entier naturel) dans sa fonction première d'être un outil qui «*en dépit de l'identité que revêt pour la perception un ensemble d'objets semblables* [fondus dans l'unité d'un genre] *sera capable de faire obstacle à la fusion mentale*»Erreur ! Source du renvoi introuvable.[12] : l'ensemble {a, a, a} a-t-il un seul ou trois éléments ?

ii) la possibilité d'introduire simplement le problème de la dénombrabilité des ensembles infinis[13];

iii) la possibilité d'introduire simplement les entiers négatifs ;

iv) la possibilité d'introduire simplement les nombres décimaux et d'opposer deux types d'ordre fondamentaux[14];

v) la possibilité d'aborder la question du rôle des systèmes de numération ainsi que celui des changements de base de numération.

3.9. Il reste, évidemment, à construire et à expérimenter des séquences pédagogiques précises, non pas tellement pour lancer déjà des programmes d'enseignement dans les écoles bilingues de la Sierra Nevada, mais bien plutôt pour accompagner les communautés dans la difficile tâche de saisir les tenants

12 BRUNSCHVICG, L. (1912) *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris : Blanchard (nouvelle édition 1981) : 477.

13 C'est-à-dire de rencontrer tout de suite les paradoxes de l'infini qui, tout à la fois, stimulèrent et paralysèrent la pensée mathématique occidentale depuis l'Antiquité grecque jusqu'aux travaux de DEDEKIND au XIXe siècle ; problème qui pourrait être posé dès la saisie du nombre trois.

14 L'ordre dit "oméga" des entiers et l'ordre dit "êta" des décimaux ou des irrationnels ; dans le premier, chaque élément possède un successeur unique ; dans le second, on peut toujours intercaler une infinité d'éléments entre deux éléments donnés.

et aboutisants d'une "véritable" culture mathématique et, si elles le jugent utile, se lancer dans l'aventure de création lexicale[15], préalable indispensable à tout enseignement des mathématiques en langues amérindiennes.

3.10. Les figures suivantes mettent en évidence quelques-uns des moments possibles de cet "enseignement" :

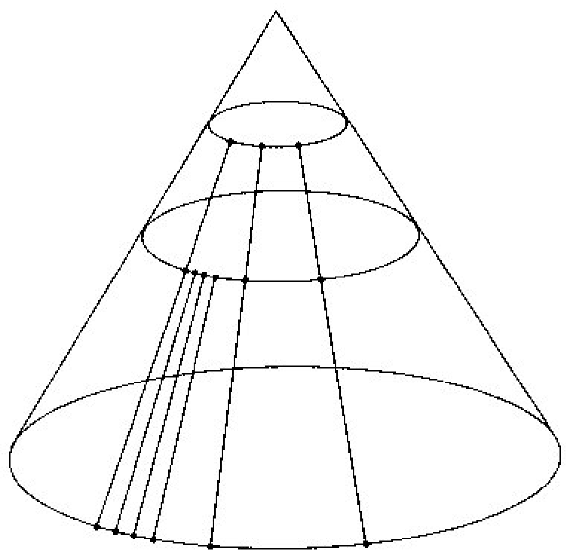

fig. 1. Apprentissage de l'énumération et de la numération

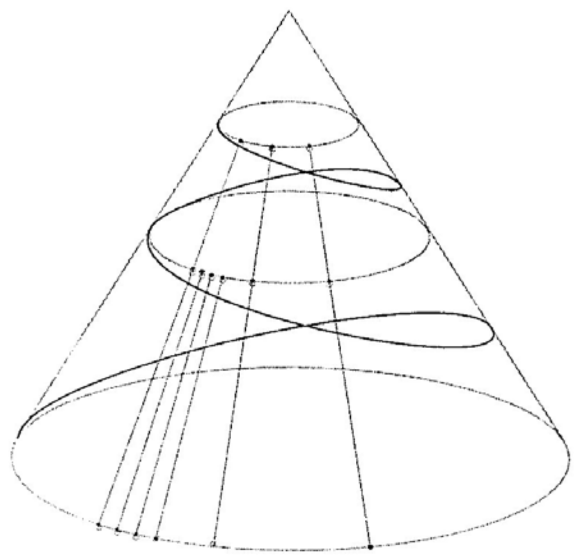

Fig.2. Apprentissage d'une concrétisation des corps de nombres

[15] Par exemple selon des modalités pratiques similaires à celles que décrit Francisco QUEIXALOS dans "Autobiographie d'une néonumération", *Amerindia* 11, 1986.